ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN ĐÌNH LÝ

PHƯƠNG PHÁP LẶP TỔNG QUÁT TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN ĐÌNH LÝ

PHƯƠNG PHÁP LẶP TỔNG QUÁT TÌM ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ KHÔNG GIÃN TRONG KHÔNG GIAN BANACH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8 46 01 12

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. TRƯƠNG MINH TUYÊN

THÁI NGUYÊN, 5/2018

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến TS. Trương Minh Tuyên, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại trường.

Tôi xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Bắc Giang, Ban Giám Hiệu trường Trung Học Phổ Thông Hiệp Hòa số 2 Bắc Giang, cũng như toàn thể các đồng nghiệp, người thân và gia đình đã quan tâm, tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện đúng kế hoạch học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, ngày 20 tháng 05 năm 2018

Tác giả luận văn

NGUYỄN ĐÌNH LÝ

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t

Mở đầu

Đầu thế kỉ XX đã xuất hiện nhiều định lý điểm bất động nổi tiếng, trong đó phải kể đến nguyên lý điểm bất động Brouwer (1912), Nguyên lý ánh xạ co của Banach (1922). Các kết quả này đã được mở rộng ra các lớp ánh xạ và không gian khác nhau. Lý thuyết điểm bất động có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực toán học khác nhau như: Giải tích số, phương trình vi phân, phương trình đạo hàm riêng, tối ưu hóa, các bài toán liên quan đến kinh tế như bài toán cân bằng, bài toán chấp nhận lồi và bài toán bất đẳng thức biến phân ...

Bài toán về điểm bất động có hai lĩnh vực được quan tâm nghiên cứu chủ yếu, đó là: Ta quan tâm đến sự tồn tại nghiệm của phương trình $T(x) = x$, trong đó T là một ánh xạ từ tập con C của không gian X vào X và nghiệm x_0 của nó được gọi là một điểm bất động của T. Trong rất nhiều trường hợp quan trọng việc giải một phương trình được đưa về việc tìm điểm bất động của một ánh xạ thích hợp. Chẳng hạn, nếu X là một không gian tuyến tính, S là một ánh xạ trong X và y là một phần tử cố định thuộc X, thì nghiệm của phương trình $S(x) = y$ chính là điểm bất động của ánh xạ T được xác định bởi $T(x) = S(x) + x - y$, với $x \in X$. Bên cạnh đó việc tìm ra các phương pháp tìm hay xấp xỉ điểm bất động của một ánh xạ cũng thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều người làm toán trong và ngoài nước.

Một trong những bài toán về xấp xỉ điểm bất động được quan tâm nghiên cứu nhiều đó là bài toán tìm điểm bất động của một hay một họ ánh xạ không giãn. Những kết quả cổ điển về lĩnh vực này phải kể đến phương pháp lặp Mann [9], phương pháp lặp Halpern [6] và phương pháp xấp xỉ gắn kết [10]. Cho đến nay đã có nhiều phương pháp được đưa ra dựa trên những cải biên của các phương pháp này cho các lớp bài toán liên quan, như bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn.

Mục đích của luận văn này là trình bày lại phương pháp lặp tổng quát được đề xuất bởi Jung trong tài liệu [7] cho bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach không có tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc, đồng thời điểm bất động này cũng là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân. Phương pháp này có thể ứng dụng vào việc giải bài toán cực trị dạng toàn phương (xem [8]) trên tập lồi, đóng C (tập điểm bất động của phép chiếu mêtric).

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề về cấu trúc hình học của các không gian Banach như không gian Banach lồi đều, không gian Banach trơn, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc; toán tử tuyến tính dương mạnh, ánh xạ giả co mạnh và ánh xạ không giãn; giới hạn Banach. Ngoài ra, trong chương này luận văn cũng giới thiệu một số phương pháp cơ bản giải bài toán điểm bất động cùng với một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng đến trong chương sau của luận văn.

Chương 2. Phương pháp lặp tổng quát tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach

Trong chương này luận văn tập trung trình bày lại một cách chi tiết các kết quả của Jung [7] về các phương pháp lặp ẩn và phương pháp lặp hiện cho bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ không giãn, đồng thời là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này gồm 5 mục. Mục 1.1 giới thiệu về không gian Banach phản xạ, không gian Banach lồi đều, không gian Banach trơn đều và toán tử j-đơn điệu. Mục 1.2 trình bày về toán tử tuyến tính dương mạnh, ánh xạ giả co, giả co mạnh và ánh xạ không giãn. Mục 1.3 giới thiệu một số phương pháp cơ bản tìm điểm bất động của ánh xạ không giãn. Mục 1.4 đề cập đến giới hạn Banach và một số tính chất quan trọng nhằm phục vụ trình bày các nội dung của chương 2. Mục 1.5 trình bày một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong chứng minh các định lý ở chương sau của luận văn.

1.1. Một số vấn đề về không gian Banach lồi đều, không gian Banach trơn và ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc

1.1.1. Không gian Banach phản xạ

Trước hết, trong mục này chúng tôi nhắc lại khái niệm không gian Banach phản xạ.

Định nghĩa 1.1. Một không gian Banach E được gọi là không gian phản xạ, nếu với mọi phần tử x^{**} của không gian liên hợp thứ hai E^{**} của E, đều tồn tại phần tử x thuộc E sao cho

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle,$$

với mọi $x^* \in E$.

Chú ý 1.1. Trong luận văn, chúng tôi sử dụng ký hiệu $\langle x, x^* \rangle$ để chỉ giá trị của phiếm hàm $x^* \in E^*$ tại $x \in E$.

Mệnh đề 1.1. [1] *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

i) *E là không gian phản xạ.*

ii) *Mọi dãy bị chặn trong E, đều có một dãy con hội tụ yếu.*

Mệnh đề dưới đây cho ta mối liên hệ giữa tập đóng và tập đóng yếu trong không gian tuyến tính định chuẩn.

Mệnh đề 1.2. *Nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian không gian tuyến tính định chuẩn X thì C là tập đóng yếu.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $x_n \rightharpoonup x$, nhưng $x \notin C$. Theo định lý tách các tập lồi, tồn tại $x^* \in X^*$ tách ngặt x và C, tức là tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\langle y, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $y \in C$. Đặc biệt ta có

$$\langle x_n, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

với mọi $n \geq 1$. Ngoài ra, vì $x_n \rightharpoonup x$ nên $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Do đó, trong bất đẳng thức trên cho $n \to \infty$, ta nhận được

$$\langle x, x^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle - \varepsilon,$$

điều này là vô lý. Do đó, điều giả sử là sai hay C là tập đóng yếu.
Mệnh đề được chứng minh. □

Chú ý 1.2. Nếu C là tập đóng yếu thì hiển nhiên C là tập đóng.

Mệnh đề dưới đây cho ta một điều kiện về sự tồn tại điểm cực tiểu của một phiếm hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trong không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.3. *Cho C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Banach phản xạ E và $f : C \longrightarrow (-\infty, \infty]$ là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới trên C, sao cho $f(x_n) \to \infty$ khi $\|x_n\| \to \infty$. Khi đó, tồn tại $x_0 \in dom(f)$ sao cho*

$$f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C\}.$$

Chứng minh. Đặt $m = \inf\{f(x) :\ x \in C\}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $f(x_n) \to m$ khi $n \to \infty$. Nếu $\{x_n\}$ không bị chặn thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $\|x_{n_k}\| \to \infty$. Theo giả thiết, $f(x_{n_k}) \to \infty$, mâu thuẫn với $m \neq \infty$. Do đó, $\{x_n\}$ bị chặn. Theo Mệnh đề 1.1 và Mệnh đề 1.2, tồn tại dãy con $\{x_{n_j}\}$ của $\{x_n\}$ sao cho $x_{n_j} \rightharpoonup x_0 \in C$. Vì f là nửa liên tục dưới trong tôpô yếu nên ta có

$$m \leq f(x_0) \leq \liminf_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = m.$$

Do đó, $m = f(x_0)$.

Mệnh đề được chứng minh. □

1.1.2. Không gian Banach lồi đều

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y$ mà $\|x\| = 1,\ \|y\| = 1$ ta có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Chú ý 1.3. Định nghĩa 1.2 còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_E$ thỏa mãn $\dfrac{\|x+y\|}{2} = 1$, suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_E$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0,1)$, trong đó

$$S_E = \{x \in E :\ \|x\| = 1\}.$$

Mệnh đề 1.4. *Giả sử C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Banach lồi chặt và phản xạ E. Khi đó, tập $C^0 = \big\{x \in C : \|x\| = \inf\{\|y\| : y \in C\}\big\}$ là gồm duy nhất một phần tử.*

Chứng minh. Đặt $d = \inf\{\|y\| :\ y \in C\}$. Khi đó, tồn tại dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\|x_n\| \to d$, khi $n \to \infty$. Từ tính bị chặn của $\{x_n\}$ và Mệnh đề 1.1, tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ sao cho $x_{n_k} \rightharpoonup x$. Từ tính đóng yếu của C (Mệnh đề 1.2), suy ra $x \in C$. Do đó, từ tính nửa liên tục dưới yếu của chuẩn ta có

$$\|x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = d.$$